STUDY COURSE BACHELOR OF BUSINESS ADMINISTRATION (B.A.)

MATHEMATICS (ENGLISH & GERMAN)

REPETITORIUM

2016/2017
Prof. Dr. Philipp E. Zaeh

LITERATURE (GERMAN)

- Böker, F., Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler. Mathematik und Statistik, München 2009.
- Böker, F., Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Das Übungsbuch, 2. Auflage, München 2013.
- Gehrke, J. P., Mathematik im Studium. Ein Brückenkurs, 2. Auflage, München 2012.
- Hass, O., Fickel, N., Aufgaben zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, München 2012.
- Sydsaeter, K., Hammond, P., Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Basiswissen mit Praxisbezug, 4. Auflage, München 2013.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. R., Basisbuch Analysis, 12. Auflage, München 2013.

LITERATURE (ENGLISH)

- Chiang, A. C., Wainwright, K., Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4rd Edition, Boston 2005. (McGrawHill)
- Dowling, E. T., Schaum's Outline of Mathematical Methods for Business and Economics, Boston 2009 (McGrawHill).
- Sydsaeter, K., Hammond, P., Essential Mathematics for Economic Analysis, 4th Edition, Harlow et al 2012. (Pearson)
- Taylor, R., Hawkins, S., Mathematics for Economics and Business, Boston 2008. (McGrawHill)
- Zima, P., Brown, R. L., Schaum's Outline of Mathematics of Finance, 2nd Edition, New York et al 2011 (McGrawHill).

REPETITORIUM - TOPICS

1. **Introductory Topics**
   - 1.1. Numbers
   - 1.2. Algebra
   - 1.3. Sequences, Series, Limits
   - 1.4. Polynomials
2. **Linear Algebra**
   - 2.1. System of Linear Equations
   - 2.2. System of Linear Inequalities
3. **Differential Calculus**
   - 3.1. Basics
   - 3.2. Derivative Rules
   - 3.3. Applications & Exercises - Curve Sketching
4. **Integral Calculus**
   - 4.1. Basics
   - 4.2. Rules for Integration
   - 4.3. Applications & Exercises

1. Introductory Topics

1.1. NUMBERS

2x / 6 ? 0 µ x Œ P natural numbers i.e P ? {1,2,3,4....}
x ? 3

2x - 6 ? 0 µ x Œ \ integers i.e Z ? {.... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}
x ? /3

2x / 5 ? 0 µ x Œ Q rational numbers (Z and fractions)
x ? $\frac{5}{2}$? 2,5

x^2 / 2 ? 0 µ Œ IR real numbers (Q and irrational numbers, roots, *r*, ...)
x ? $-\sqrt{2}$

x^2 - 2 ? 0 µ Œ C complex numbers (IR and imaginary numbers)
x ? $-\sqrt{-2}$? $-\sqrt{2}$ ◊ $\sqrt{/1}$? $-\sqrt{2}$i where i ? $\sqrt{-1}$

1.2.3 POWERS

1.2.5 Logarithms

Potential function $a ? b^n$, if looking for a e.g $8 ? 2^3$

Square root function $b ? \sqrt[n]{a}$, if looking for b e.g $2 ? \sqrt[3]{8}$

Logarithm $n ? \log_b a$, if looking for exponent n
n equals logarithm of a to the basis b

Question [illegible] **do you have to raise** [illegible] **in order to get** [illegible] **as the result** [illegible]

1.2. ALGEBRA

1.2.5 Logarithms

Examples:

[illegible]

1.2.5 Logarithms

More Examples:

$$10^{-2} = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \sqrt[-2]{0.01} \quad \Leftrightarrow \quad -2 = \log_{10} 0.01$$

$$10^{3} = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \sqrt[3]{1000} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \log_{10} 1000$$

$$4^{-1} = 0.25 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \sqrt[-1]{0.25} \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \log_{4} 0.25$$

1.2.5 Logarithms

Further Proofs:

c

Recall a b n a

Also take log on both sides of a b with base c

a b a b

a n b n $\frac{a}{b}$ (2)

From (1) and (2), we get

a $\frac{a}{b}$

Natural logarithm

n! (factorial) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Example: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$1! = 1$

Definition: $0! = 1$

1.2.6 Factorial, Absolute Value, Sums

Sigma sign: **Examples:**

$$\sum_{=1} = 1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots +$$

$$\sum_{=0}^{5} = {}_0 + {}_1 + {}_2 + {}_3 + {}_4 + {}_5$$

$$\sum_{=0}^{6} 2 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

$$\sum_{=1}^{3} 2\cdot = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3$$

$$\sum_{=1}^{4} {}^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{=1}^{5} {}^{1/2} = 1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + 4^{1/2} + 5^{1/2}$$

General Notation of a Sequence (Folge):

Arithmetic Sequences

Definition: A sequence is called arithmetic if the following is valid:

with

Composition law for arithmetic sequences:

Example:

Consider the sequence

Geometric Sequences

Definition: A sequence is called geometric, if the following is valid:

$$\frac{a_k}{a_{k/1}} ? q \quad \text{with}$$

Composition law for geometric sequences:

Example: Consider the sequence

Series (Reihen)

During the composition of an (infinite) series all elements of a sequence are summed up:

? Â

?1

The sum up to the n-th element is called n-th partial sum:

? Â

?1

1.3. SEQUENCES, SERIES AND LIMITS

Partial sums of the arithmetic series (a := a_1):

Arithmetic series with d ? 1, a ? 1:

S_n ? 1 - 2 - 3 - ....n ? $\frac{1}{2}$ n *n - 1+

General:

S_n ? a - *a - d+ - *a - 2d+ - ... - *a - *n / 1+ d+

S_n ? a_n / *n / 1+d - a_n / *n / 2+d - ...... - a_n / 2d - a_n / d - a_n

$2S_n$? n(a_1 - a_n) ± S_n ? $\frac{n(a_1 - a_n)}{2}$ ± S_n ? $\frac{n}{2}$(2a - (n / 1)d) ? na - $\frac{((n / 1)nd)}{2}$

Small Exercise: Substitute a=1, d=1 in the General formula of S_n and simplify. What do you obtain?

[illegible]

Example: Geometric Series

Suppose that you invest in a real estate and purchase a land near Hamburg. A renewable energy business firm takes it on rent. According to terms, the lease can be done for every six months, the amount of rent is subject to 10% increase in each subsequent lease. The first amount of rent is ♯ 6000. Calculate the total amount of rental payments that would be received for the period of 5 years.

The resulting geometric sequence 6000

$$a_1 = 6000,\ a_2 = 6600,\ \ q = 6600/6000 = 1.1,\ n=10$$

$$S_{10} ? \frac{6000(1.1^{10} / 1)}{1.1 / 1} ? 95624.54$$

Small Exercise: What is the value of rental payments received at the end of 3 years?

Exercise:

Suppose that a production plant produces 100 chocolate bars in the first day. The production capacity can be increased by 5% every day. Calculate the total output of the production plant for two weeks.
(hint: you have to use S_n formula where a=100, q=1.05 and n=14)

Now also calculate the number of chocolate bars produced on the 10th day.

A super market places an order of 800 bars at the start of the first day of production. How many days will it take to fulfill the order?

Definition: A function with the form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n = \sum_{i=0} a_i x^i$$

is called a n-th degree polynomial function.

The real numbers are called coefficients.

1.4. POLYNOMIALS

1.4.1. 1st and 2nd degree Polynomials

Which different mathematical ways can be used to describe geometric objects?

1st degree polynomials describe (straight lines):

Two-point-form (from the slope $\frac{\Delta y}{\Delta x}$)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; (= \tan\alpha) \quad \text{and} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \text{ respectively}$$

General form $y = a_0 + a_1 \cdot x$ with a_0: y-intercept
a_1: slope

The equation of a parabola (n=2)

Example:

From vertex form to standard form:

consider y ? $(x - 3)^2 - 4$

with vertex form parameters:

x_s ? /3, a_s ? 1, y_s ? 4

expand, we get

y ? $x^2 - 6x - 9 - 4$

y ? $x^2 - 6x - 13$

standard form parameters:

a_2 ? 1, a_1 ? 6, a_0 ? 13

Example:

From standard form to vertex form:

y ? $x^2 - 6x - 10$

standard form parameters

a_2 ? 1, a_1 ? 6, a_0 ? 10

y ? $x^2 - 2(3)(x) - 9 - 1$

y ? $x^2 - 2(3)(x) - 3^2 - 1$

y ? $(x - 3)^2 - 1$

with vertex form parameters

x_s ? /3, a_s ? 1, y_s ? 1

The equation of a parabola (n=2) General form:

Examples:

x

2

Zeros of a quadratic function, i.e. intersection wi

[illegible]

1.4.3 Determination of the zeros of a polynomial

Decompositition into linear factors

Theorem: If x_0 is the (e.g. guessed) zero of a n-th degree polynomial P(x) , the linear factor (x に x_0) can be seperated from the polynomial:

P(x) = u(x)(x に x_0). In this case u(x) is a polynomial with the degree (n に 1).

The coefficients of the remaining polynomial u(x) can be determined through either
Kラヴミ Wヴｹゲ" マ WﾃｴラS"ふミラデ" I ラ └WヴWS" ｴWヴWぶ" ラヴ" ｩラﾉ├ミラ マｷ;ﾉ" ﾉラミｪ" Sｷ└ｲｹｷラミく

Polynomial long division

If, in a rational function, the degree of the numerator is higher or equal to the degree of the denominator, a can be conducted.
Through polynomial long division the zeros of a polynomial can be determined, if one zero is already known. In this case the original polynomial is divided by the respective linear factor.
Example: x^3 に $3x^2$ + 4 has a zero at x = 2.
Further zeros can then be determined through polynomial long division.
In addititon to this slant asymptotes can be determined, if the degree of the numerator is exactly one higher than the degree of the denominator (also see chapter 2, differential and integral calculus).

Polynomial long division

Example:

$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x - 2) = (x^2 - x - 2)(x - 2)$

$$
\begin{array}{r}
x^2 - x - 2 \\
x - 2 \,\big)\, x^3 - 3x^2 + 4 \\
-x^3 + 2x^2 \\
\hline
-x^2 + 4 \\
x^2 - 2x \\
\hline
-2x + 4 \\
2x - 4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Therefore, x-2 is the factor of $(x^3 - 3x^2 + 4)$

Polynomial long division

Example:

$(x^4 + x^2 - 2) : (x + 1) = (x^3 - x^2 + 2x - 2)(x + 1)$

$$
\begin{array}{r}
x^3 - x^2 + 2x - 2 \\
x + 1 \,\big)\, x^4 + x^2 - 2 \\
-x^4 - x^3 \\
\hline
-x^3 + x^2 - 2 \\
x^3 + x^2 \\
\hline
2x^2 - 2 \\
-2x^2 - 2x \\
\hline
-2x - 2 \\
2x + 2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Small Exercise:
$(x^2 - 9x - 10) / (x+1)$

We know
$(x^2 - 9x - 10) = (x+1)(x-10)$
Verify it with long division.

1.4. POLYNOMIALS

Properties of polynomials

An n-th degree polynomial has a maximum of n real zeros.

The addition, subtraction, multiplication and linking of polynomial functions (polynomials) always results in polynomials again.

The division, on the other hand, results in rational functions.

び"'vヴラa<"7ヴ<"vエキ/キワワ";<"ｨ;WI

System of Linear Equations:

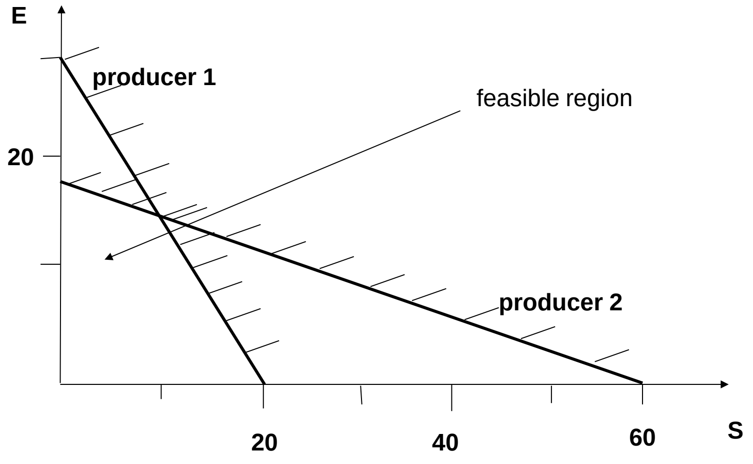
A finite set of linear equations is called a **system of linear equations or a linear system**. For example,

System of two equations:

$$2x / y ? 3$$
$$5x - y ? 4$$

System of three equations:

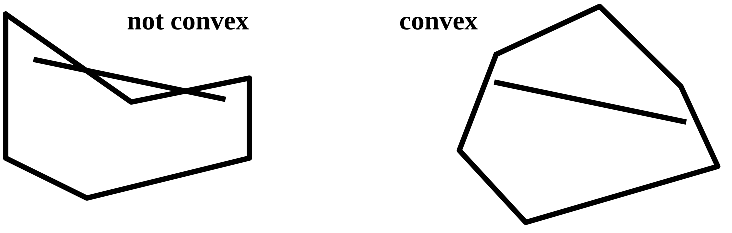
$$x - y - z ? 5$$
$$2x / y - z ? 3$$
$$-x - y - z ? 9$$



Three cases have to be distinguished:

- **Normal case:**
  The space of admissible solutions Z is bounded and not empty.
  Then it is a

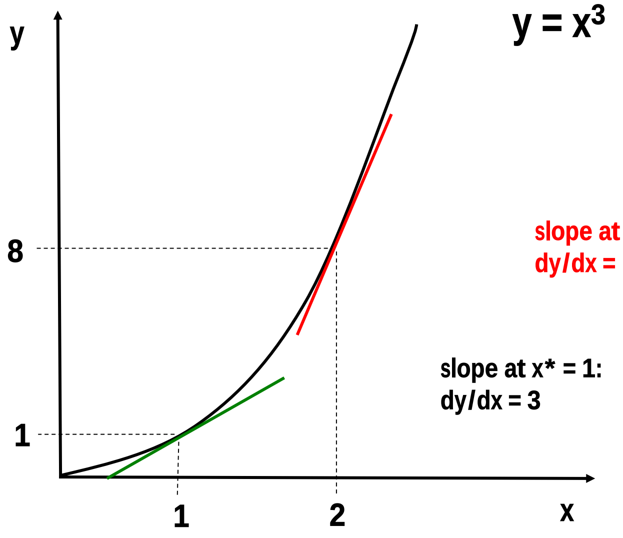
Convexity of the admissible range:



Convexity means that every connecting line between two point of the admissible range completely lies inside the range.

3. Differential Calculus

Examples: Different tangents to a curve



$y = x^3$

slope at x* = 2:
dy/dx = 12

slope at x* = 1:
dy/dx = 3

HSBA HAMBURG SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION

a) Power Function $y ? x^n$ $\qquad y| ? nx^{n/1}$

Examples:

$y ? x^9$

$y ? x^2$

$y ? x(? x^1)$

$y ? 1(? x^0)$

$y ? \frac{1}{x}(? x^{/1})$

$\sqrt{\ }\ (\sqrt[2]{x}22\, x^{\frac{1}{2}})$

b) Exponential Function $y = e^x \qquad y' = e^x$

$$y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a} \qquad y' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

[illegible]

c) Logarithmic Function $y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$

$x > 0$

$$y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

$$a^y = x \Rightarrow y \cdot \ln a = \ln x \Rightarrow y' \cdot \ln a = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

d) Trigonometric Function $y = \sin x \qquad y' = \cos x$

$$y = \cos x \qquad y' = -\sin x$$

[illegible]

c) Product Rule:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

$$y = f \cdot g \qquad y' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$y = f \cdot g \cdot h \qquad y' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Example:

$$y = (\ln x) \cdot 4x^2 \qquad y' = 4 \cdot (\frac{1}{x} x^2 + (\ln x) \cdot 2x) = 4x(1 + 2\ln x)$$

$$y = \sqrt{x} \cdot e^x \cdot x^5 \qquad y' = (\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x \cdot x^5 + \sqrt{x} \cdot e^x \cdot x^5 + \sqrt{x} \cdot e^x \cdot 5x^4) = e^x \cdot x^4 (\frac{x}{2\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + 5\sqrt{x})$$

3.2. DERIVATIVE RULES

d) Quotient Rule:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Example:

$$y = \frac{x^3}{4 - x^2} \qquad y' = \frac{3x^2 \cdot (4 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4 - x^2)^2} = \frac{x^2(12 - x^2)}{(4 - x^2)^2}$$

a) **Domain**

Necessary and sufficient conditions for local extrema

[illegible]$_0$) = 0

I.e., if there is a maximum or a minimum at x_0 [illegible]$_0$) = 0

[illegible]$_0$) < 0

[illegible]$_0$

[illegible]$_0$) > 0

[illegible]$_0$

Continuation of the Example

5. Tangent at IP:

Slope at IP:

$$f'(4) = 128$$

$$t(x) = mx + b$$

$$-176 = 128 \cdot 4 + b$$

$$-688 = b$$

$$t_1(x) = 128x - 688$$

6. **Parallel line to the inflection tangent:**

b

256 b

t(x) 128x 256

HSBA HAMBURG SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION

4. Integral Calculus

HSBA HAMBURG SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION

If is integrated, you obtain the primitive function

If is differentiated, you obtain

Integration is the reversal of differentiation.

2. Theorem of differential and integral calculus

If

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$y = f(x) - g(x)$$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Example 1:

$$\int_1^2 (9x^2 - 4x - 2 / a^2 - x^{/1} - 72x^{/2})dx$$

Example 2:

$$\int_a^2 (3x^2 / x^{/2} / a^2 / 4x)dx$$

Example 3:

$$\int_1^2 (3 / 6x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^x)dx$$

Partial integration and integration by substitution are not covered here.

Mathematics REPETITORIUM
Academic Year 2016/2017

Elementary Calculations

a+(b-c) = a+b-c

a-(b-c) = a-b+c

a*(b+c)=ab + ac

(b+c)/a = b/a + c/a

a/(b+c) not equal to a/b + a/c !!!

(a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd => $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^n * b^n = (a*b)^n$

$a^n / b^n = (a/b)^n$

7. $x^2 + 2\sqrt{5}x - 40 = 0$

8. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

9.

5. $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{}$

Arithmetic and geometric sequences and series

1. The sum of the first seven numbers of an arithmetic sequence is 42 and the sum of the first and the fourth term is -12. Determine a1 and d.

2. In an arithmetic series the sum of the 7^{th} and 10^{th} element is 83. The sum of the first four elements is 46. Determin7

2. The sum of the first fot2.98462(n)h8.98438(7 re)7

Curve Sketching

6. $L = \{2;1\}$

7. $L = \{\pm 2\sqrt{3}\}$

Fractional Equations

t Equations

Roo

3. $D = \{x \in \ldots \mid x > \frac{13}{2}\}$; $L = \{2\}$

11. $L = \{1;29\}$

12. $L = \{-4; 2,5\}$

r systems of equations

Linear

Arithmetic and geometric sequences and series

1. $a_1 = -18$; $d = 8$

2. $a_1 = 4$; $d = 5$

3. $q = 2$; $a_{12} = 32768$

4. $q = \frac{3}{4}$; $S_{10} = 18{,}874$

5. $d = -1{,}5$; $a_1 = 3$; $S_{10} = -37{,}5$

6. $n = 630$

7. $n = 61$

8. $d = 30$; $n = 20$

9. $S_{10} = 642{,}02$ m ; n = 16, 16 Tage

10. a) $a_9 = 107{,}84$ m. ;
    b) $S_{300} = 13.083{,}46$ m.
    c) n = 454 Tage

Curve Sketching

Please sketch the graph of the following functions:

1.

[illegible]

2.

[illegible]

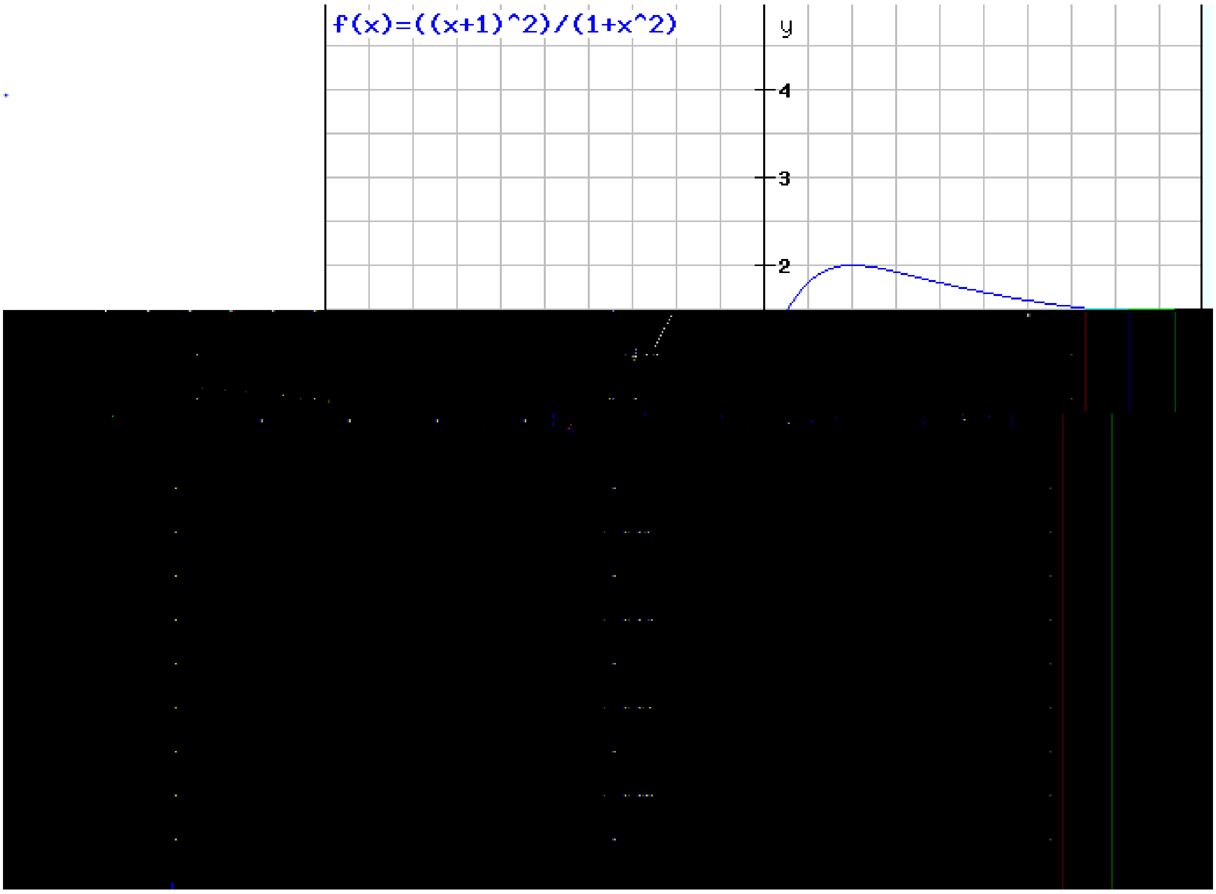
3.

[illegible]

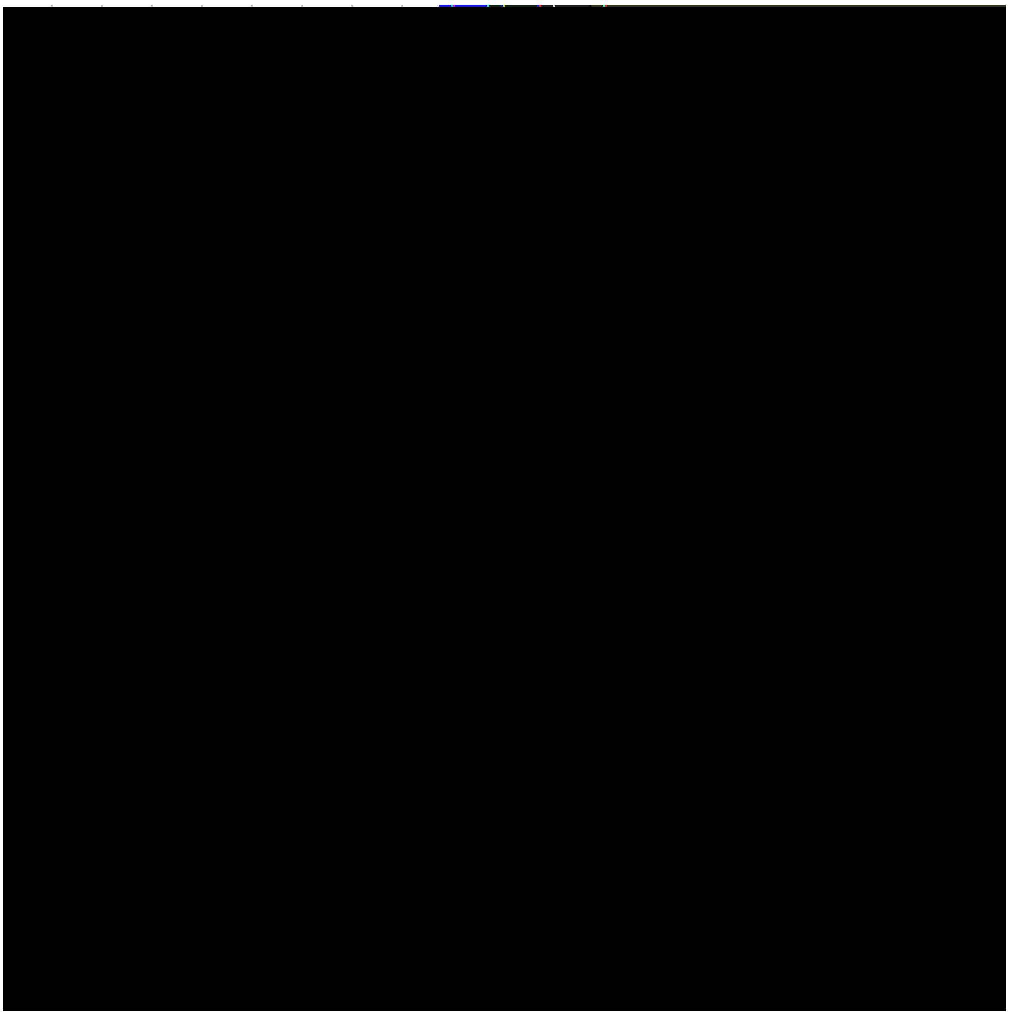
4.

[illegible]

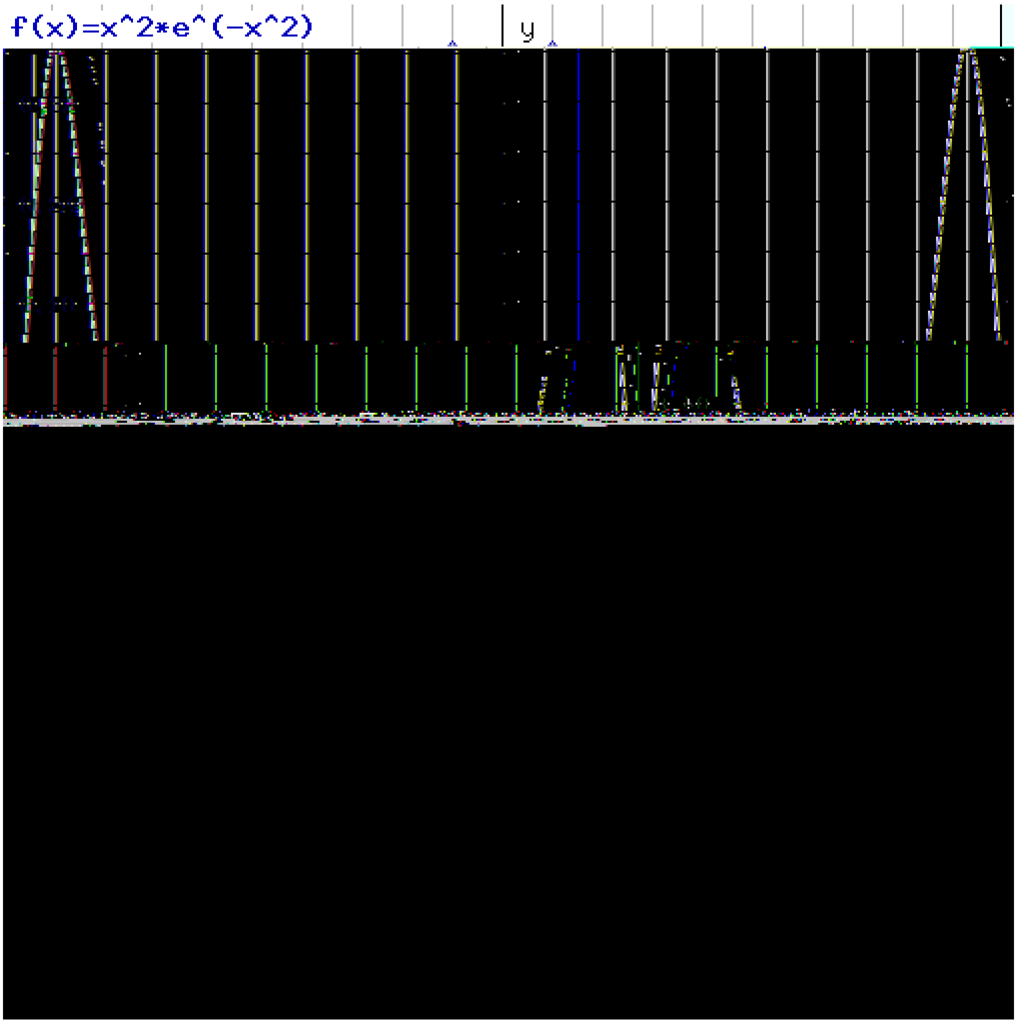
1.



2.



4.



HSBA

VORKURS - M A T H E M A T I K

Literaturhinweise:

Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.
Taschenbuch der Mathematik

BEISPIELE MIT LÖSUNGEN

Mathematik 2 — Distributivgesetz

FORMELN

$a(b+c) = ab + ac$

$a(b-c) = ab - ac$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Faktorisieren

$$ab + ac = a(b + c)$$

BEISPIELE

$$24x^3y^7z^{10} + 72x^{11}y^5z^3 = 24x^3y^5z^3(y^2z^7 + 3x^8)$$
$$= 12x^2y^2z^2(2xy^5z^8 + 6x^9y^3z)$$
$$= 6x^5y^7z^n(4x^{-2}z^{10-n} + 12x^6y^{-2}z^{3-n})$$

BINOME

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$(x+9)(x-3) = x^2 + 6x - 27$

$(x^2 + 6x - 27) : (x+9) = x - 3$

$\underline{-(x^2 + 9x)}$

$-3x$

$\underline{-(-3x - 27)}$

0

BEISPIEL MIT REST

$(x^2 + 6x + 100) : (x+9) = x - 3 + \frac{127}{x+9}$

$\underline{-(x^2 + 9x)}$

$-3x$

$-\underline{(-3x - 27)}$

127

BEISPIELE

$(x^5 - x^4 \quad -16x + 16) : (x^2 + x - 2) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$\underline{-(x^5 + x^4 - 2x^3)}$

$\underline{-(-2x^4 - 2x^3 + 4x^2)}$

FORMEL

$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=\frac{x+y}{a}$

BEISPIELE

3 a 3+a

$\frac{3}{x}+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4a}{x}=\frac{12+z+4a}{x}$

4 7 11

$\frac{x}{\ }+\frac{y}{\ }+\frac{3}{\ }=\frac{x+y+3}{\ }$

[illegible]

BEISPIELE

$\frac{4}{3}+\frac{7}{5}=\frac{4.5+7.3}{3.5}=\frac{41}{15}$

$\frac{x}{3}+\frac{b}{7}=\frac{7x+3b}{21}$

$\frac{4a+b}{2}+\frac{6}{x}=\frac{(4a+b)x+6.2}{2x}$

$\frac{3}{a-b}+\frac{4}{a+b}=\frac{3(a+b)+4(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{7a-b}{a^2-b^2}$

$\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x^3-x^2}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}+\frac{3}{(x+1)(x+1)}+\frac{4}{x^2(x-1)}=$

HN: x (x+1)

(x+1) (x-1)

(x+1)(x+1)

HN = $\underline{xx}$ x^2 (x+1)(x+1) $\underline{(x-1)}$ (x-1)

[illegible] $x^3-x+2x^3+2x^2+3x^3-3x^2+4x^2+8x+4$ = $6x^3+3x^2+7x+4$

Wurzelrechnung

$$b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \Rightarrow \sqrt[2]{9} = \pm 3$$
$$x^5 = 32 \rightarrow x = 2 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = +2$$
$$x^3 = -125 \rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$$
$$x^4 = 256 \rightarrow \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

$$\sqrt[2]{-100} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$$

Mathematik 7 — Gleichungen 1. Grades

Allgemeine Form: $x a + b = 0$ mit $a, b \in R$ und $a \neq 0$

BEISPIELE

$$11(4x+3)+9 = 3(1-6x)+70$$
$$44x+33+9 = 3-18x+70$$
$$44x+42 = -18x+73$$
$$62x = 31$$
$$x = 0{,}5$$

[illegible]

$$-28x = 28$$
$$x = -1$$

KONSTANTE a IN DER AUFGABE

$$-3x+6a = -5x-12a+4$$
$$2x = -18a+4$$
$$x = -9a+2$$

Die Konstante a ist im Zähler: $a \in R$

$$3x(a+4)-5 = 6(1+3x)+7$$
$$3ax+12x-5 = 6+18x+7$$
$$3ax-6x = 18$$
$$3x(a-2) = 18$$
$$x(a-2) = 6$$
$$x = \frac{6}{a-2}$$

Die Konstante ist in der Lösung im Nenner: $a \neq 2$

Mathematik 8 — Gleichungen 2. Grades

Allgemeine Form : $a x^2 + b x + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$

p - q - Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN:

1. Quadratische Ergänzung

$x^2 - x - 12 = 0$

$x^2 + 11x + 24 = 0$

$x^2 + 11x = -24$

Mathematik 10 — Gleichungen 4. Grades

ALLGEMEINE FORM: $a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = 0$ mit $a,b,c,d,e \in R$ und $a \neq 0$

FALL 1: $c, d, e = 0$

$5 x^4 + 15 x^3 = 0$
$5 x^3 (x + 5) = 0$
$x_{1,2,3,} = 0 \quad x_4 = -5$

FALL 2: $b, d, e = 0$

$3 x^4 - 12 x^2 = 0$
$3 x^2 (x^2 - 4) = 0$
$x_{1,2} = 0 \quad x_{3,4} = \pm 2$

FALL 3: $d, e = 0$

$x^4 - 13 x^3 - 48 x^2 = 0$
$x^2 (x^2 - 13 x - 48) = 0$
$x^2 (x - 16)(x + 3) = 0$
$x_{1,2} = 0 \quad x_3 = 16 \quad x_4 = -3$

FALL 4: $e = 0$

$x^4 - 4 x^3 - 44 x^2 + 96 x = 0$
$x (x^3 - 4 x^2 - 44 x + 96) = 0$ — **Lösung durch Probieren:** $x_2 = 2$
$x_1 = 0$

Mathematik 12 LGS

[redacted]

Inhomogene lineare Gleichungssysteme

1.1. I $3x + 4y = 2$ 5I $15x + 20y = 10$

II $5x - 10y = 20$ 3II $\underline{15x - 30y = 60}$

5I-3II $50y = -50$

$y = -1$ eingesetzt in I : $3x + 4(-1) = 2$ liefert $x = 2$

LÖSUNG: genau eine: L (2 / -1)

1.2. I $3x + 11y = 5$ I – II liefert : $0 = -2$ Widerspruch

II $3x + 11y = 7$

LÖSUNG : keine $L = \{ \}$

1.3. I $3x + 6y = 18$ I – 6II liefert : $0 = 0$

II $0{,}5x + y = 3$

LÖSUNG : beliebig viele: L = R

Homogene lineare Gleichungssysteme

1.4. I $3x + 7y = 0$

II $5x + 2y = 0$

LÖSUNG : genau eine L=(0/0) oder beliebig viele: L = R

Inhomogene Gleichungssysteme haben auf der rechten Seite mindestens einer Wert ungleich Null.
Homogene Gleichungssysteme haben auf der rechten Seite lauter Nullen.
Inhomogene LGS haben genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen.
Homogene LGS haben immer die Lösung Null für jede Variable oder unendlich viele Lösungen falls eine Zeile aus lauter Nullen besteht.

2. 3 Gleichungen mit 3 Variablen

2.1. I $3x + 2y - 5z = -8$

II $x + 9y - 9z = 0$

III $12x + y - 12z = -14$

Zuerst wird aus je zwei Gleichungen eine Variable (in diesem Fall die Variable x) entfernt:

[redacted]

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = mx + b$

mit b, m aus der Menge der reellen Zahlen und m ungleich Null.
Der Graph einer Funktion ersten Grades ist eine Gerade.
Der Anstieg der Funktion $f(x) = mx + b$ ist definiert als

$m = \tan \alpha$ wobei der Tangens eines Winkels das Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete ist.

Falls m den Wert Null hat, verläuft der Graph der Funktion parallel zur Abszisse und schneidet die Ordinate in b.

Senkrechte Geraden im Koordinatensystem sind keine Funktionen und statt der Bezeichnung f(x) verwendet man die Form $x = a$, wobei die Senkrechte die Abszisse in a schneidet.

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Setze $f(x) = 0$

$mx + b = 0$ $\qquad x_0 = - b/m$

x_0 heißt Nullstelle

Funktionen 2. Grades

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

und die Normalform einer Funktion 2. Grades lautet:

[illegible]

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

mit a, b, c aus der Menge der reellen Zahlen und a ungleich Null.

1. Bestimmung der Nullstellen von Funktionen 2. Grades

Für Funktionen 2. Grades

- mit einem Term der Form $f(x) = x^2 + c$
  lauten die Nullstellen $x_{01,02} = \pm\sqrt{-c}$

- mit einem Term der Form $f(x) = x^2 + bx$
  lauten die Nullstellen $x_{01} = 0$, $x_{02} = -b$

[illegible]

Funktionen 3. Grades

Die allgemeine Form der Funktionsgleichung lautet:

$$\mathbf{f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$$

mit a,b,c,d aus der Menge der reellen Zahlen und a ungleich Null.

1. Bestimmung der Nullstellen von Funktionen 3. Grades

F. 3. G. haben entweder genau eine reelle und zwei komplexe *oder* genau drei reelle Nullstellen. F. 3. G. schneiden die Abszisse mindestens einmal.

Funktionen 3. Grades der Form

- $f(x) = a\,x^3$ haben eine dreifache Nullstelle (Sattelpunkt) bei x = 0.

[illegible]

- $f(x) = x^3 + c\,x = x\,(x^2 + c)$ haben eine NS bei x = 0 und zwei NS bei $x = \pm\sqrt{-c}$.
- $f(x) = x^3 + b\,x^2 = x^2\,(x + b)$ haben zwei NS bei x = 0 und eine NS bei x = -b.
- $f(x) = (x + k)^3$ haben eine dreifache NS (Sattelpunkt) bei x = - k.
- $f(x) = x^3 + b\,x^2 + c\,x = x\,(x^2 + b\,x + c)$ haben eine NS bei x = 0 und die beiden anderen NS lassen sich durch Lösung der verbleibenden quadratische Gleichung $x^2 + b\,x + c = 0$ ermitteln.

Funktionen 4. Grades

Die allgemeine Form der Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$$

mit a,b,c,d,e, aus der Menge der reellen Zahlen und a ungleich Null.

Falls der Koeffizient a positiv (negativ) ist, verläuft der Graph der Funktion von oben links

1. Bestimmung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades

Funktionsgleichungen der Form

- $f(x) = a x^4$ haben eine vierfache NS bei x = 0 .
- $f(x) = x^4 + e$ haben zwei reelle NS bei $x = \pm\sqrt[4]{-e}$ und zwei komplexe NS.
- $f(x) = x^4 + d x^3 = x^3 (x + d)$ haben eine dreifache NS bei x=0 und eine einfache

  bei x = - d.
- $f(x) = x^4 + c x^2 = x^2 (x^2 + c)$ haben eine doppelte NS bei x = 0 und zwei NS bei $x = \pm\sqrt{-c}$.

Funktionen höheren Grades

Folgen und Reihen

Definition einer unendlichen Folge: $\langle a_n \rangle_{n \in N} = \langle a_1, a_2, \ \dots \ , a_n, \ \dots \rangle \quad mit \quad a_n \in \Re$

Definition einer Reihe: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n$

Hinweis: Eine Folge wird zu einer Reihe, wenn man die

Grenzwerte von Folgen

Definition:

Eine Zahl g mit g aus der Menge der reellen Zahlen heißt GRENZWERT einer Folge, wenn sich die Glieder der Zahlenfolge mit wachsendem n (d.h. mit wachsender Platzziffer) der Zahl g beliebig annähern.

Differentialrechnung

Beispiel: Allgemeine Berechnung:

$f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$ $\quad x_{01,02,03} = 0 \quad x_{04} = 4$ NS: f(x) = 0

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ $\quad x_{11,12} = 0 \quad x_{13} = 3$ EX: f ′ (x) = 0

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x\,(x-2)$ $\quad x_{21} = 0 \quad x_{22} = 2$ WP: f ′′ (x) = 0

Max oder Min ?

$f''(x_{11}) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ weder / noch
$f''(x_{13}) = f''(3) = 36 \Rightarrow$ Min(3 / – 27)

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ Min
$f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ Max
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ weder / noch

Krümmungsverhalten im Wendepunkt:

$f'''(x_{21}) = f'''(0) = -24 \leq 0 \Rightarrow$ l / r – Übergang
$f'''(x_{22}) = f'''(2) = +24 \geq 0 \Rightarrow$ r / l – Übergang

$f'''(x) \leq 0 \Rightarrow$ l / r
$f'''(x) \geq 0 \Rightarrow$ r / l

Wendepunkt: WP (2 / - 16) Sattelpunkt: SP (0 / 0)

Hinweis: Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt:
$f'(x) = 0 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) \neq 0$

Tangente im Wendepunkt: WP (2 / -16) und den Anstieg m = f ′(x) = - 16 in die allgemeine Geradengleichung g (x) = m x + b einsetzen.
Ansatz: -16 = (- 16) 2 + b b = 16 $t_{WP}(x) = -16x + 16$

Ableitungsregeln

Bilden Sie die erste Ableitung und fassen Sie - soweit wie möglich- zusammen:

1) $f(x) = (6x^4 + 3x^2 + px^2 + 1)^{2n-1}$

2) $f(x) = \dfrac{3}{7ax + by - (xy)^n}$

3) $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{bx^2 + cx}\right)^{n+1}$

4) $f(x) = \dfrac{ax^4 + b}{x^3}$

5) $f(x) = \dfrac{(x-a)^3}{x^3}$

6) $f(x) = x^3 \cdot (bx^3 + cx + d)^{3n}$

7) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

8) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{25 - x^2}}$

Lösungen:

1) $f`x) = (2n-1)(6x^4 + 3x^2 + px^2 + 1)^{2n-2} \cdot (24x^3 + 6x + 2px)$

2) $f`(x) = \dfrac{0 \cdot \left[7ax + by - (xy)^n\right] - 3\left[7a - n(xy)^{n-1} \cdot y\right]}{\left[7ax + by - (xy)^n\right]^2} = \dfrac{-21a + 3ny(xy)^{n-1}}{\left[7ax + by - (xy)^n\right]^2}$

3) $f`(x) = (n+1)\left(\dfrac{2x+1}{bx^2+cx}\right)^n \cdot \dfrac{2(bx^2+cx) - (2x+1)(2bx+c)}{(bx^2+cx)^2} =$

$(n+1)\left(\dfrac{2x+1}{bx^2+cx}\right)^n \cdot \dfrac{-2bx^2 - 2bx - c}{(bx^2+cx)^2} = \dfrac{(n+1)(2x+1)^n(-2bx^2 - 2bx - c)}{(bx^2+cx)^{n+2}}$

4) $f`(x) = \dfrac{4ax^3 \cdot x^3 - (ax^4 + b) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{4ax^4 - 3ax^4 - 3b}{x^4} = \dfrac{ax^4 - 3b}{x^4}$

5) $f`(x) = \dfrac{3(x-a)^2 \cdot 1 \cdot x^3 - (x-a)^3 \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{3(x-a)^2 \cdot x - (x-a)^3 \cdot 3}{x^4} =$

$\dfrac{3(x-a)^2(x-(x-a))}{x^4} = \dfrac{3a(x-a)^2}{x^4}$

6) [illegible]

Integralrechnung I

1. Allgemeines Integral

$\int f(x)dx = F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ Bez. Unbestimmtes Integral

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ Bez. Bestimmtes Integral

2. Grundintegral für ganze rationale Funktionen

[illegible]

2.2. Ausgewählte Sätze zur Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx \text{ mit } k \in IR$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \text{ mit } a \le b \le c$$

$$\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

2.3. Partielle Integration nach den Variablen x und y

$$\int (3ax^6 + 7x^5 + 4x^3 - 1)dx = \frac{3}{7}ax^7 + \frac{7}{6}x^6 + x^4 - x + C$$

[illegible]

Integralrechnung II

3. Grundintegral für gebrochene rationale Funktionen

3.1. $\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$

3.2. Beispiele zur Flächenberechnung

$$\int_1^{10} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{10} = -\frac{1}{200} - (-\frac{1}{2}) = \frac{99}{100}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{R} = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2R^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

[illegible]

$$\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10 - 0 = \ln 10$$

5. [illegible]

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

6. Beispielaufgabe zu 3. bis 5.

$$\int_a^b \left(3x^4 + 7ax^2 + \frac{3}{x^7} + \frac{a}{4x^3} - \frac{2}{x} + e^x - a \right) dx = \left[\frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{3}ax^3 - \frac{3}{6x^6} - \frac{a}{8x^2} - 2\ln x + e^x - ax \right]_a^b$$

7. [illegible] $\int \frac{x+7}{\ldots}$ [illegible]

1.1 Logarithmengesetze

(1) $\log ab = \log a + \log b$
(2) $\log ab^{-1} = \log a - \log b$
(3) $\log a^r = r \cdot \log a$

1.2 Die allgemeine und natürliche Logarithmusfunktion

$f(x) = \log_2(x)$ $g(x) = \log_3(x)$ $h(x) = \lg(x)$ $i(x) = \ln x$

Kurvendiskussionen von Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = (2x-1)\,e^x$

a) Diskutieren Sie die Funktion und protokollieren Sie dabei detailliert die Arbeitsschritte.

b) Bestimmen Sie die Wendetangente und ihren Schnittpunkt mit der x-Achse.

c) Die Wendetangente, der Graph der Funktion und die x-Achse schließen eine Fläche ein. Wie groß ist diese Fläche?

d) Ist die Fläche, die von der [illegible]

Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen lauten:

1. $f(x) = \sin x$

D = $\Re$ Nullstellen bei x = $n\pi$ Extremwerte bei x = $(n+\frac{1}{2})\pi$

[illegible]

D = $\Re$ Nullstellen bei x = $(n+\frac{1}{2})\pi$ Extremwerte bei x = $n\pi$

Wendepunkte an den Nullstellen Periode: 2π

Formeln zur Differentiation und zur Integration von ganzen und gebrochenen

rationalen Funktionen:

1. Differentiation
   von ganzen rationalen Funktionen

1.1. Summenformel $f(x) = x^n$ $f'(x) = n\,x^{n-1}$

1.2. Produktregel $f(x) = u(x)v(x)$

$$f'(x) = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

1.3. Kettenregel $f(x) = f(g(x))$

$$f'(x) = [f(g(x))]' = f'(u)\,g'(x)$$

von gebrochenen rationalen Funktionen

1.4. Quotientenregel $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$f'(x) = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

1.5. Logarithmusfunktion

[illegible] 1